Лекция 7. Тізбектің және функцияның шектері

Анықтама 1. X және Y бос емес сандар жиындары болсын. Егер X жиынының кез келген x элементіне белгілі бір заңдылықпен Y жиынының бір y элементі сәйкес келетін болса, онда X жиынында $y = f(x)$ ***функциясы*** берілді дейді. Мұндай жағдайда $x-$ті ***тәуелсіз шама (аргумент),*** ал $y-$ті ***тәуелді шама*** деп атайды. f әрпі X пен Y жиындарының арасында сәйкестік заңдылықты береді. X жиыны функцияның анықталу облысы, ал Y жиыны функция мәндерінің жиыны деп аталады.

Функцияның үш түрлі жолмен беріледі:
а)Аналитикалық тәсілмен;
б) Таблицалық, яғни мәндер тәсілімен;
в) Графиктік тәсілмен

Анықтама 2. Егер X аралығында жатқан барлық x нүктелері үшін $|f(x)| \le M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, онда $f(x)$ функциясы X аралығында ***шектелген функция*** деп аталады.

Анықтама 3. $[a,b]$ сегментінде (аралығында) анықталған $f(x)$ функциясы үшін $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ осы аралықта өспелі (кемімелі) функция деп аталады.

Функция қандай да бір аралықта өспелі немесе кемімелі болса, онда бұл аралық ***монотондық аралық***, ал $f(x)$ функциясы осы аралықта ***монотонды*** деп аталады.
Мысал. $y = x^2$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ аралығында монотонды және: $(-\infty; 0)$ интервалында кемімелі, ал $(0; +\infty)$ интервалында өспелі.

Жұп және тақ функциялар.
а) $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D$ болса, $f(x)$ - жұп функция;
б) $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D$ болса, $f(x)$ - тақ функция.

Периодты функциялар. D облысында анықталған $f(x)$ фукциясы үшін $T > 0$ саны табылып, $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D$, теңдігі орындалса, онда $f(x)$ периодты функция деп аталады.

Күрделі функция. $y = f(u)$ функциясының анықталу облысы U, мәндер жиыны Y болсын, ал u айнымалысы X жиынында анықталған $x-$ке тәуелді, мәндер жиыны U болатын функция болсын: $u = \varphi(x)$. Сонда X жиынында берілген, мәндер жиыны Y болатын $y = f(\varphi(x))$ функциясы ***күрделі функция*** деп аталады.
Мысалы, $y = lncosx$ - күрделі функция, өйткені оны былай жазуға болады: $y = lnu, u = cosx$.

Кері функция. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы X, ал мәндер жиыны Y болсын. Әрбір $y \in Y$ мәніне $f(x) = y$ теңдігі орындалатындай бір $x \in X$ мәнін сәйкес қойсақ, онда Y жиынында анықталған, ал мәндер жиыны X болатын $x = \varphi(y)$ функциясы анықталады. Осы функция $y = f(x)$ функциясының ***кері***

функциясы деп аталады және ол $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ түрінде жазылады. $y=f(x)$ және $x=\varphi(y)$ функциялары өзара кері функциялар деп аталады.

Белгісіз функция y анық түрде берілмей, $F(x,y)=0$ түрінде берілсе, онда $F(x,y)=0$ тәуелділігі ***айқындалмаған функция*** деп аталады.

Функцияның $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $\alpha<t<\beta$ параметрлік түрде берілуі. Егер $x=\varphi(t)$ функциясы үшін $t=\Phi(x)$ кері функция табылса, онда $y=\psi(\Phi(x))=f(x)$ түрдегі $y-$тің $x-$ке тәуелді функциясын аламыз.

Ескерту: Функцияның параметр арқылы берілуі функцияның координат жүйесінде берілуінен көп тиімді, әрі кеңірек қолданылады.

Анықтама 1. $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ тізбегінің шегі *a* - санын айтады : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, егер кез келген $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$ саны табылып, *n* > *N* үшін $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Мысал. Шектің анықтамасын қолданып $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$ дәлелдеу керек.

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

яғни $N=N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-1$ деген номер табылады. Егер $\varepsilon=0{,}1$ болса, онда *N* = 10-1=9

Анықтама 2. Егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $\delta>0$ саны табылып, кез келген $0<|x-a|<\delta$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының x шамасы $a-$ға ұмтылғандағы $(x\to a)$ шегі деп аталады да, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ түрінде белгіленеді.

Анықтама 3. Егер $\forall\varepsilon>0$ (кезкелген $\varepsilon>0$) саны, үшін $\exists\delta>0$ ($\delta>0$ саны) табылып, $\forall x\in(a-\delta,a)$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x-$ тің $a-$ ға сол жақтан ұмтылғандағы шегі немесе $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі сол жақ шегі делінеді. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$

Анықтама 4. Егер $\forall\varepsilon>0$ (кезкелген $\varepsilon>0$) саны, үшін $\exists\delta>0$ ($\delta>0$ саны) табылып, $\forall x\in(a,\ a+\delta)$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x-$ тің $a-$ ға оң жақтан ұмтылғандағы шегі немесе $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі оң жақ шегі делінеді. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$

Анықтама 5. Егер $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болса, онда теңдігі орындалса, онда $\alpha(x)$ функциясы $x\to a$ (x шамасы $a-$ ға ұмтылғанда) шексіз аз шама (ш.а.ш.) деп аталады.

Анықтама 6. Егер $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=+\infty$ болса, онда $\beta(x)$ функциясы $x\to a$ -ғы шексіз үлкен шама (ш.ү.ш.) деп атайды.

Шектер туралы негізгі теоремалар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, болса, онда

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$
3. Кезкелген $x \in U_\delta(a)$ үшін, $g(x) \neq 0$ және $\mathrm{B} \neq 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Мысалдар.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2 - 2x + 7\right) = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 + 7 = 8$.

Шекті есептеу үшін *x*-тің мәнін қойғанда $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 1^\infty; 0\cdot\infty;$ т.с.с. анықталмағандықтар пайда болады.

Шекті есептеу деп осы анықталмағандықтарды ашуды айтады.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+16}{x-4} = \dfrac{18}{-2} = -9$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2}}{\dfrac{4x^2 + 2x + 5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x + 2 - x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \dfrac{2}{\infty} = 0$.